




Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas

Juan D. Godino

Resumen

En este trabajo analizamos el modelo de conocimiento del profesor propuesto por Shulman y las adaptaciones realizadas por diversos autores al campo de la educación matemática. Tras identificar algunas limitaciones en los modelos considerados proponemos un modelo que comprende categorías de análisis más finas de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, basado en la aplicación del “enfoque ontosemiótico” sobre el conocimiento y la instrucción matemática. Incluimos también una pauta para la formulación de cuestiones de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos basada en el modelo propuesto. Consideramos que las nociones presentadas pueden ser usadas por los profesores como herramientas de análisis y reflexión sobre su propia práctica

Abstract

In this paper we analyse the Shulman's teacher knowledge model and some adaptations and interpretations of it developed by different authors in the field of mathematics teacher education. After identifying some limitations in these models we propose a model that includes more detailed categories of analysis for mathematics and didactics teachers' knowledge, based on the application of the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. We also describe a guideline to formulate questions to assess such knowledge based on the proposed model. These new categories can be used by the teachers as tools to analyse and reflect on their own practice.

Resumo

Neste trabalho analisamos o modelo de conhecimento do professor proposto por Shulman e as adaptações realizadas por diversos autores ao campo da educação matemática. Depois de identificar algumas limitações nos modelos considerados propomos um modelo que compreende categorias de análises mais finas dos conhecimentos didáctico-matemáticos do professor, baseado na aplicação do “enfoque ontosemiótico” sobre o conhecimento e a instrução matemática. Incluimos também uma pauta para a formulação de questões de avaliação dos conhecimentos didáctico-matemáticos baseada no modelo proposto. Consideramos que as noções apresentadas podem ser usadas pelos professores como ferramentas de análises e reflexão sobre sua própria prática.

1.- Introducción

En la bibliografía de investigación sobre la formación y el pensamiento del profesor (Philipp, 2007; Sowder, 2007; Wood, 2008) encontramos diversos modelos teóricos que describen los tipos de conocimientos que los profesores deben poner en juego para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Estos modelos son necesarios para organizar los programas de formación, inicial o permanente, y para evaluar su eficacia. Aunque hay un consenso general de que los profesores deben dominar los contenidos disciplinares correspondientes, no hay un acuerdo similar sobre la manera en que se debe lograr dicho dominio, ni siquiera acerca de cómo se debería concebir la disciplina. Se suele reconocer que el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos,...). Los profesores deberían ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje.

El objetivo de este trabajo es presentar un modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor (sección 3) que tenga en cuenta las diversas facetas o dimensiones implicadas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos, así como diversos niveles de conocimiento en cada una de dichas facetas. Este modelo está basado en el “enfoque ontosemiótico” (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), sistema teórico para la investigación en educación matemática, cuyas categorías de análisis se pueden usar como herramientas para identificar y clasificar los conocimientos requeridos para la enseñanza de las matemáticas, y por tanto, para analizar los conocimientos puestos en juego por el profesor.

Con el fin de mostrar las nuevas posibilidades analíticas del modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor basado en el EOS con relación a otros modelos existentes incluimos una síntesis de dichos modelos, comenzando por el propuesto por Shulman (1986; 1987). Seguidamente estudiamos la aplicación de este modelo al caso de la educación matemática realizado por Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), así como la noción de “proficiencia” en la enseñanza de las matemáticas introducida por Schoenfeld y Kilpatrick (2008). En la sección 4 del trabajo aplicamos nuestro modelo de conocimiento didáctico para formular tipos de cuestiones para evaluar dichos conocimientos, o como puntos de reflexión de los profesores sobre aspectos relevantes de su propia práctica. Estas cuestiones pueden servir también como punto de partida para enunciar situaciones introductorias para el desarrollo de los conocimientos matemático-didácticos en acciones formativas específicas.

2.- Modelos de Conocimiento Didáctico del Profesor

Como se pone de manifiesto en esta sección, no hay acuerdo en la literatura de investigación en el campo de formación de profesores para designar con una única expresión el complejo de conocimientos, competencias, disposiciones, etc., que un

profesor de matemáticas (o de otras áreas) pone en juego para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Nuestra concepción de la Didáctica de la Matemática como disciplina que asume el compromiso de articular las diversas disciplinas interesadas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 1991) (matemáticas, epistemología, psicología, pedagogía, sociología, semiótica, etc.) nos lleva a proponer la expresión “conocimiento didáctico-matemático del profesor” para referirnos a dicho complejo de conocimientos y competencias profesionales. Incluimos, por tanto, en el conocimiento didáctico, el conocimiento del contenido matemático en cuanto dicho contenido se contempla desde la perspectiva de su enseñanza. El control de las transformaciones que se deben aplicar al contenido matemático para su difusión y comunicación en los distintos niveles escolares debe ser también una competencia del profesor de matemáticas.

2.1. Conocimiento del contenido para la enseñanza

El trabajo de Shulman (1986) se reconoce como pionero en llamar la atención sobre el carácter específico del conocimiento del contenido para la enseñanza. Propuso tres categorías del conocimiento del contenido: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico del contenido (PCK¹) y conocimiento curricular. El PCK lo describe como “la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza” (p.9) y también como “esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional” (p.8). En otro trabajo posterior Shulman (1987) propuso siete categorías de conocimiento que hacen posible la enseñanza, a saber:

- 1) conocimiento del contenido;
- 2) conocimiento pedagógico general;
- 3) conocimiento del currículo;
- 4) conocimiento pedagógico del contenido (PCK);
- 5) conocimiento de los estudiantes y sus características;
- 6) conocimiento de los contextos educativos; y
- 7) conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación (p. 8).

Como fuentes de este conocimiento base para la enseñanza Shulman enumera las siguientes: 1) formación académica en la disciplina a enseñar; 2) los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (por ejemplo, los currículos, los libros de texto, la organización escolar y la financiación, y la estructura de la profesión docente); 3) la investigación sobre la escolarización; las organizaciones sociales; el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores; y 4) la sabiduría que otorga la práctica misma, las máximas que guían la práctica de los profesores competentes.

La propuesta de Shulman ha jugado un papel importante en el desarrollo de investigaciones e implementaciones curriculares para la formación de profesores.

¹ Siglas correspondientes a la expresión inglesa, “Pedagogical Content Knowledge”.

Las categorías identificadas por este autor siguen vigentes, aún cuando las interpretaciones iniciales dadas a las mismas han ido cambiando. Ponte y Chapman (2006) sostienen que el énfasis de la comunidad de investigadores fue puesto sobre la categoría “conocimiento pedagógico del contenido”, la cual en su momento representó un avance importante en las concepciones sobre el conocimiento del profesor.

2.2. Conocimiento matemático para la enseñanza

La noción de PCK ha dominado la literatura casi durante 20 años. Recientemente la noción de “conocimiento matemático para la enseñanza” (MKT²) ha sido introducida en el campo en diversos trabajos de Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), a partir de la observación del trabajo de los profesores en el aula de matemáticas. En Hill, Ball, y Schilling (2008) se define el conocimiento matemático para enseñar como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno.” (p. 374). Los análisis del trabajo del profesor les lleva a clasificar en dos grandes grupos los conocimientos puestos en juego (Figura 1): conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido³. Para la primera categoría distinguen entre, Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático. Para el conocimiento pedagógico del contenido proponen tener en cuenta, Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y Conocimiento del Currículo.

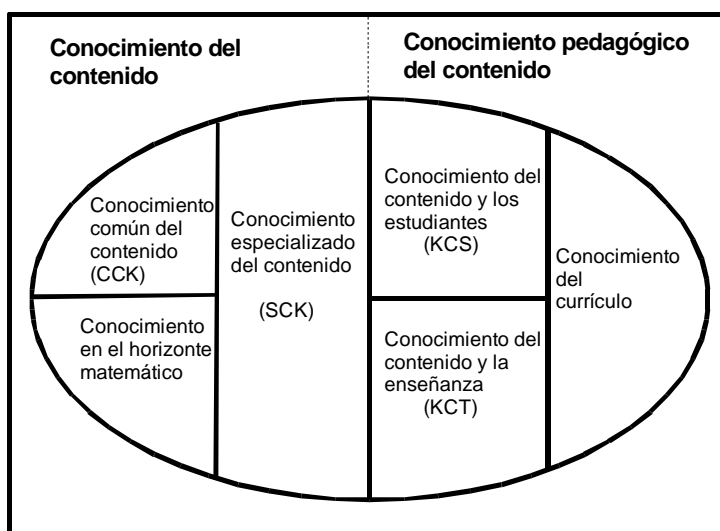


Figura 1: Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p.377)

La distinción entre el conocimiento común del contenido (CCK) y el especializado (SCK) consiste en que, mientras el primero refiere al conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático, o incluso un sujeto adulto con suficiente conocimiento, está capacitado; el segundo

² Siglas correspondientes a la expresión inglesa, “Mathematical Knowledge for Teaching”.

³ Una propuesta detallada de “conocimiento del contenido matemático” para profesores de educación primaria se desarrolla en Godino y cols (2004a) mientras que para el “conocimiento del contenido didáctico” se hace en Godino y cols (2004b).

refiere, por ejemplo, a realizar un ordenamiento de las secuencias con que podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico. Para esta última acción, es posible que un sujeto adulto, o inclusive un matemático, no tenga necesariamente la competencia ni la posibilidad de llevarla a cabo. Estos autores consideran que el profesor debe tener un conocimiento más avanzado del contenido específico que le lleve a plantearse cuestiones tales como: ¿Puede tener consecuencias matemáticas conflictivas algo que se ha dicho de manera explícita o implícita?; ¿Es esto interesante e importante desde el punto de vista matemático? ¿Hay alguna desviación en las ideas matemáticas tratadas?,... Refieren a estos aspectos del conocimiento matemático del profesor, como “conocimiento en el horizonte matemático”. Se trata de conocimiento que aporta perspectiva a los profesores para su trabajo.

Hill, Ball, y Schilling (2008) definen el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) como el “conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular” (p. 375). Incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático. Respecto al Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas.

Como afirman Graeber y Tirosh (2008, p. 124), “El hecho de que muchos investigadores no ofrecen una descripción precisa y compartida de PCK sino más bien intentan caracterizarlo con listas o ejemplos es una indicación de que el concepto está aún mal definido”. Similares limitaciones encuentran Silverman y Thompson (2008) para la noción de MKT: “Aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que sea, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores” (p. 499).

Algunas cuestiones sobre las cuales se continúa trabajando relacionadas con el PCK se refieren a:

- 1) el papel de las creencias, afectos y valores en el desarrollo del PCK del profesor;
- 2) determinar si los componentes del PCK son dependientes de los paradigmas de enseñanza /aprendizaje asumidos;
- 3) mejora de los métodos para evaluar el PCK y nociones relacionadas;
- 4) elaboración de nociones más globales que incluyan conocimientos, creencias y afectos, tales como orientación, perspectiva e identidad del profesor (Philipp, 2007).

2.3. “Proficiencia” en la enseñanza de las matemáticas

Schoenfeld y Kilpatrick (2008) utilizan la expresión “proficiencia”⁴ en la enseñanza de las matemáticas que puede ser interpretada como una referencia a los conocimientos (y competencias) que deberían tener los profesores para que su enseñanza se pueda considerar de calidad. “Una teoría de la proficiencia (en la enseñanza) dice lo que es importante – qué destrezas necesitan desarrollar las personas para llegar a ser proficientes”. Se trata de extender la noción de proficiencia en la matemática escolar (introducida en Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001) donde se incluye: comprensión conceptual, fluencia procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo, y disposición productiva.

La noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas se puede interpretar en términos de competencia profesional del profesor de matemáticas. Schoenfeld y Kilpatrick (2008, p. 322) proponen distinguir las siguientes dimensiones:

1) Conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud. El profesor tiene múltiples maneras de conceptualizar el contenido del nivel correspondiente, representarlo de diversas maneras, comprender los aspectos clave de cada tópico, y ver conexiones con otros tópicos del mismo nivel. El conocimiento profundo del contenido le permite seleccionar las “grandes ideas” para ser propuestas a los alumnos, así como responder con flexibilidad a las cuestiones que le planteen.

2) Conocer a los estudiantes como personas que piensan. Implica tener sensibilidad sobre lo que los estudiantes piensan, lo que proporciona información adicional sobre cómo los estudiantes dan sentido a las matemáticas y sobre cómo pueden construir sus conocimientos.

3) Conocer a los estudiantes como personas que aprenden. Esto supone ser consciente de la teoría del aprendizaje asumida y sus implicaciones en términos de las actividades de clase y las interacciones con los estudiantes.

4) Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje. La creación de entornos productivos de aprendizaje incluye bastante más que la mera “gestión de la clase”. Implica la creación de comunidades intelectuales en las que los estudiantes se comprometen en actividades intelectuales legítimas (p. 338).

5) Desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la “enseñanza para la comprensión”. La clase debe trabajar como una comunidad de aprendizaje; esto supone que los alumnos tienen que adoptar ciertas normas sociales en la clase, tales como la obligación de explicar y justificar sus soluciones, deben intentar comprender el razonamiento de los otros estudiantes, preguntar si no comprenden, y desafiar los argumentos con los que no están de acuerdo.

6) Construir relaciones que apoyen el aprendizaje. El profesor debe trabajar para organizar el contenido, sus diversas representaciones, y poner en relación a los estudiantes entre sí y con el contenido. El aprendizaje emerge de estas relaciones

⁴ La palabra ‘proficiencia’ no está incluida en el Diccionario de la Lengua Española. Existe el adjetivo proficiente, “Dicho de una persona: Que va aprovechando en algo”. En español se podría usar el término ‘eficacia’: “Capacidad de lograr el efecto que se desea o se espera”; o también, ‘eficiencia’, “Capacidad de disponer de alguien o de algo para conseguir un efecto determinado”, en nuestro caso, una enseñanza de la matemática de alta calidad.

mutuamente constituidas.

7) Reflexionar sobre la propia práctica. “Lograr proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, como lograr proficiencia matemática, es un proceso interactivo a lo largo de la vida. Ante un problema de la práctica de la enseñanza, el profesor de matemáticas necesita pensar reflexivamente sobre el problema si quiere resolverlo. Una vez hecha habitual, la reflexión puede llegar a ser el principal mecanismo para mejorar la propia práctica” (p. 348).

Schoenfeld y Kilpatrick concluyen que su propuesta es el primer paso hacia una teoría de la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, y que indudablemente, se requieren nuevos refinamientos y elaboraciones.

Algunas limitaciones de los modelos de conocimiento del profesor de matemáticas

Desde nuestro punto de vista, los modelos de “conocimiento matemático para la enseñanza” elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías muy generales. Consideramos que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Ello permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemáticas.

A título de ejemplo, veamos la tarea sobre comparación de números racionales que Sullivan (2008) propuso a grupos de profesores para evaluar en qué medida podían describir el contenido de una tarea matemática y la manera en que podían usar dicha cuestión como punto de partida para diseñar una lección:

¿Qué es mayor $\frac{2}{3}$ o $\frac{201}{301}$?

a) Encuentra distintas maneras en que los estudiantes podrían resolver la tarea.

b) Si desarrollaras una lección basada en esta tarea, ¿qué matemáticas podrías esperar que los alumnos aprendieran?

Sin duda que esta tarea y las consignas a) y b) promueven la reflexión del profesor sobre la actividad matemática que los alumnos realizan al resolverla; sugiere, además, que los alumnos pueden abordar la tarea usando distintos procedimientos y que el aprendizaje matemático es el resultado de los procesos de resolución de problemas. Sin embargo, nos parece que la cuestión planteada de “qué matemáticas” podrías esperar que los alumnos aprendieran requiere que los profesores compartan un modelo explícito sobre la naturaleza de las matemáticas, y en particular los tipos de objetos y procesos que intervienen y emergen en la práctica matemática. Por otra parte, el diseño de una lección a partir de una secuencia de tareas requiere tener en cuenta, además de los conocimientos matemáticos que se ponen en juego, otras facetas que condicionan los aprendizajes (facetas cognitiva, instruccional, curricular,...). Para cada una de estas facetas consideramos necesario adoptar modelos explícitos y detallados de sus elementos constituyentes que ayuden en el análisis y reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En la siguiente sección describimos un modelo teórico sobre el conocimiento didáctico que en cierta manera contempla las categorías propuestas en los modelos descritos anteriormente, aporta nuevos niveles de análisis de las mismas, y ofrece una cierta sistematicidad en el tratamiento del tema.

3. Facetas y Niveles del Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor

En esta sección proponemos un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor que integra, organiza y extiende los modelos descritos en la sección anterior. Este modelo está basado en el marco teórico para la Didáctica de las Matemáticas que denominamos “Enfoque Ontosemiótico” del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007)⁵. El EOS es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Se adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas y las interacciones entre las mismas. Con dicho fin incluye, a) Un modelo epistemológico sobre las matemáticas basado en presupuestos antropológicos/ socioculturales; b) Un modelo de cognición matemática sobre bases semióticas; c) Un modelo instruccional sobre bases socio-constructivistas; d) Un modelo sistémico – ecológico que relaciona las anteriores dimensiones entre sí y con el trasfondo biológico, material y sociocultural en que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación matemática.

Las nociones teóricas del EOS deben ser vistas como herramientas de análisis y reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, y pueden ser utilizadas por los propios profesores para indagar sobre su propia práctica. Se han elaborado varios sistemas de objetos y relaciones (categorías) que ayudan a analizar y comprender, de manera sistemática, y con distintos niveles de profundidad, los diversos aspectos implicados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

3.1. Facetas y niveles de análisis didáctico

El objeto central de estudio de la didáctica son los procesos de enseñanza y aprendizaje, implicando, por tanto, un “contenido”, estudiantes, profesor, medios tecnológicos, y siendo tales procesos realizados en el seno de un contexto institucional y social determinado que condiciona y hace posible la realización del proceso educativo. Se trata del estudio de sistemas heterogéneos y complejos para los cuales es necesario adoptar modelos teóricos específicos para cada uno de los componentes. Dado que los distintos componentes del sistema interactúan entre sí se considera necesario identificar y tener en cuenta las distintas facetas intervinientes. El estudio se puede realizar, además, según distintos niveles de análisis, de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales fundadas.

La figura 2 resume las facetas y niveles que propone el EOS para el análisis didáctico. Cada uno de los elementos considerados se puede interpretar como

⁵ Una versión en español de este artículo, revisada y ampliada, así como otros trabajos relacionados, están disponibles en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino>

categorías o componentes del conocimiento del profesor (del contenido matemático y didáctico).



Se trata de un modelo “poliédrico” cuya representación en planta indica las diversas facetas a tener en cuenta en un proceso de estudio y el alzado indica cuatro niveles de análisis sobre los cuales se puede fijar la atención. Debemos resaltar que aunque las facetas y niveles se han representado de manera disjunta, con la finalidad de discriminar su presencia en cualquier proceso de estudio de un contenido específico, tales facetas y niveles interactúan entre sí.

Figura 2: Facetas y niveles del conocimiento del profesor

Se propone tener en cuenta las siguientes facetas para analizar los procesos de instrucción matemática:

1. Epistémica: Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
2. Cognitiva: Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
3. Afectiva: Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
4. Mediacional: Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
5. Interaccional: Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
6. Ecológica: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,... que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Nuestro modelo considera como claves las facetas epistémica y cognitiva y postula para ellas un punto de vista antropológico y semiótico: la matemática como actividad humana que adquiere significado mediante la acción de las personas ante situaciones – problemas específicos. Pero también se concede relevancia a las demás facetas (afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) ya que condicionan los aprendizajes y la enseñanza.

En cuanto a los niveles de análisis se proponen los siguientes:

1. Prácticas matemáticas y didácticas. Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.
2. Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos). Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad

de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.

3. Normas y metanormas. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
4. Idoneidad. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

Las facetas y niveles de análisis que hemos descrito sucintamente constituyen un sistema de categorización de los conocimientos del profesor que incluye los modelos descritos en la sección 2 y los amplía mediante las nociones teóricas que se detallan a continuación.

3.2. Herramientas para el análisis didáctico

El análisis de los conocimientos que se ponen en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje, con fines de diseño de experiencias formativas de profesores o de evaluación de tales conocimientos, requiere aplicar categorías más detalladas que las descritas en la sección 2 (modelos PCK, MKT, ...). En el EOS se han desarrollado categorías de análisis explícitas para las dimensiones epistémica y cognitiva partiendo de una concepción de la matemática de tipo pragmático – antropológico (nociones de práctica y de institución), sin que esta visión implique el rechazo de la noción de objeto matemático. Para ello el objeto matemático es interpretado como entidad emergente e interviniente en las prácticas. En la figura 3 se resumen las categorías de objetos (y procesos) introducidos en el EOS, las cuales permiten realizar análisis pormenorizados de la actividad matemática, y por tanto, también de los conocimientos que intervienen en una enseñanza idónea de las matemáticas.

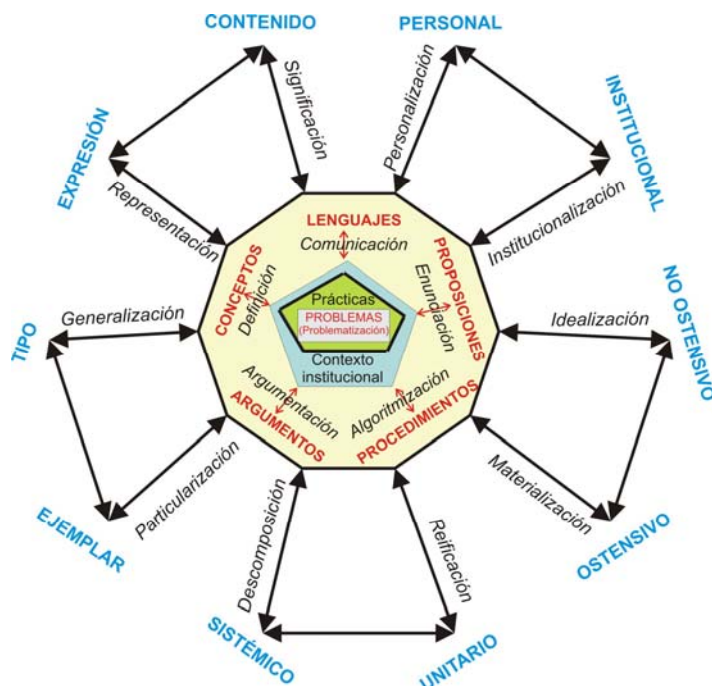


Figura 3: Prácticas, objetos y procesos matemáticos

La realización de este tipo de análisis por parte de los propios profesores se puede considerar como una competencia cuyo logro sería deseable alcanzar (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008), ya que permite profundizar en el conocimiento del contenido matemático para la enseñanza (conocimiento especializado y en el horizonte matemático, en la terminología de Ball y colaboradores).

Para el análisis de los procesos instruccionales el EOS ha introducido la noción de configuración y trayectoria didáctica cuyos elementos constituyentes se resumen en la figura 4. La tipología de normas (reglas, hábitos, ...) que intervienen y condicionan los procesos instruccionales, elaborada en Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009), ayuda a comprender mejor dichos procesos, al permitir un nuevo nivel de análisis de los mismos.

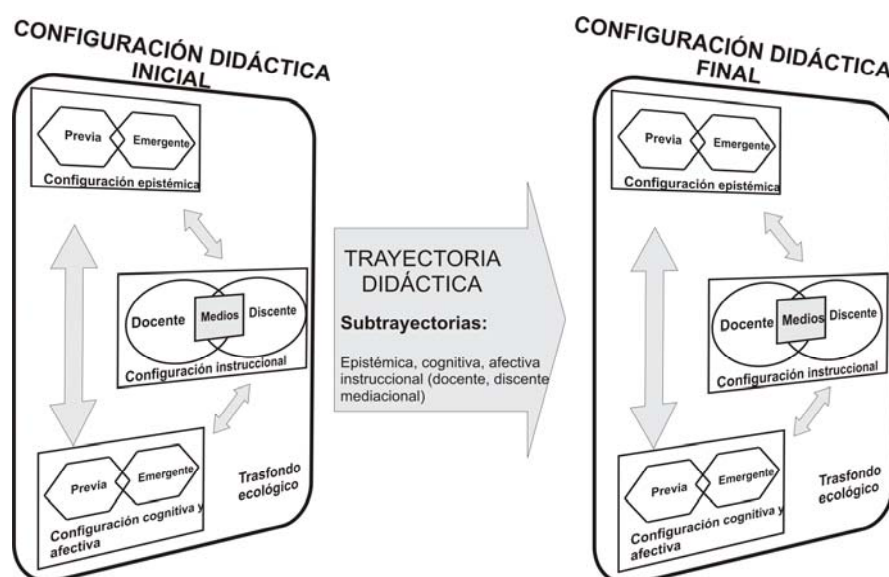


Figura 4: Configuraciones y trayectorias didácticas

Las herramientas descritas en las figura 3 y 4 permiten análisis pormenorizados de aspectos parciales de los procesos de enseñanza y aprendizaje, tales como la descripción de los objetos y procesos puestos en juego en la resolución de una tarea matemática, o las interacciones en el seno de un proceso instruccional de carácter local. El diseño y evaluación de planes de formación matemática (y didáctica) a nivel más global, como puede ser la implementación de una lección, una unidad didáctica, o un programa de estudio, requiere instrumentos conceptuales apropiados para dicho nivel.

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción, ha sido introducida en el EOS (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. La figura 5 resume las principales características de dicha noción.

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:

- Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación, ...) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- Idoneidad ecológica, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

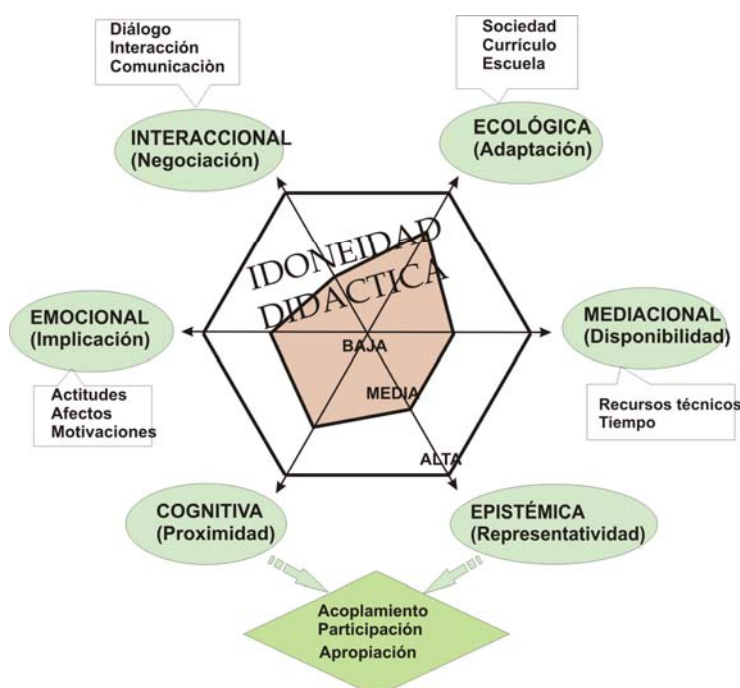


Figura 5: Idoneidad didáctica

Aunque las seis dimensiones de la idoneidad didáctica son en cierta medida similares a las dimensiones de la proficiencia, y también a las dimensiones del “conocimiento matemático para la enseñanza” (MKT), las nociones de “configuración de objetos y procesos” (en su doble versión, institucional y personal) y “configuración didáctica” proporcionan un desglose operativo de tales dimensiones, necesario para la organización de procesos formativos y su evaluación.

4. Evaluación y Desarrollo del Conocimiento Didáctico – Matemático

Incluimos en esta sección una “guía” para el enunciado de consignas (items de evaluación o propuestas de actividades) sobre el conocimiento matemático - didáctico del profesor, teniendo en cuenta el modelo descrito en la sección 3. Con las necesarias adaptaciones este tipo de cuestiones pueden ser usadas para: (i) la valoración de situaciones introductorias en procesos formativos para el desarrollo de competencias profesionales, (ii) como “cuestionario” de auto-evaluación y reflexión del profesor sobre aspectos relevantes de su propia práctica, y (iii) como instrumento de un evaluador externo para valorar un proceso de estudio implementado.

Con fines de evaluación, la metodología puede ser,

1) Elegir una tarea matemática (un proyecto, secuencia de actividades) cuya solución ponga en juego los principales aspectos del contenido, o de las competencias a desarrollar.

2) Formular consignas que cubran las distintas (o principales) facetas y niveles de análisis didáctico (figuras 2, 3 y 4). Las tablas 1 a 4 incluyen ejemplos de tales consignas, sin la pretensión de ser exhaustivos. Se puede ver que las consignas a) y b) de la tarea propuesta por Sullivan pueden ser ampliadas de manera sistemática usando las categorías de conocimiento didáctico descritas en la sección 3.

Tabla 1: Conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado)

Faceta epistémica	Consigna
Conocimiento común	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:
Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	
Conexiones	-Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

La pregunta, ¿qué matemáticas podrías esperar que los alumnos aprendieran?, se concreta y hace operativa con la noción de “configuración de objetos y procesos”. Esta noción lleva a pensar de manera sistemática en los diferentes procedimientos posibles de resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego con distintos grados de formalidad en su formulación, así como sobre maneras de argumentar o justificar los procedimientos y propiedades. El análisis del tipo de tarea propuesta y las variables didácticas que intervienen en la misma orienta la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos.

La reflexión sistemática sobre el aprendizaje de los estudiantes queda facilitada por los tipos de consignas que incluimos en la tabla 2.

Tabla 2: Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes (aprendizajes)

Faceta cognitiva + afectiva	Consigna
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones,...)	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.
Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones	Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.
Evaluación de aprendizajes	Formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas (o contenidos).
Actitudes, emociones, creencias, valores	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas (o el estudio del tema).

La noción de configuración cognitiva se corresponde con la de configuración epistémica, incluyendo componentes similares. Aquí se supone que la tarea ha sido propuesta a los estudiantes y que se dispone de los protocolos de respuesta, o bien de observaciones de las exploraciones y argumentaciones de los estudiantes. La comparación con las configuraciones epistémicas (soluciones previstas) permite determinar el grado en que se alcanzan los objetivos de aprendizaje pretendidos.

La reflexión sistemática sobre las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, y la identificación de las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje los modos de gestión de la clase, se puede facilitar con el tipo de consignas que incluimos en la tabla 3.

Tabla 3: Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza

Faceta instruccional (interaccional + mediacional)	Consigna
Configuración didáctica: - Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido - Modos de interacción profesor – alumnos; alumnos – alumnos; - Recursos materiales - Tiempo asignado	Describe la configuración didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas)	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.

Finalmente la reflexión sobre los aspectos que Shulman (2007) describe como conocimiento curricular, contextos educativos, fines, propósitos y valores de la educación, se puede concretar con consignas similares a las que incluimos en la tabla 4.

Tabla 4: Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares

Faceta ecológica	Consigna
Orientaciones curriculares	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos).
Conexiones intra-disciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Conexiones interdisciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Otros factores condicionantes	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Análisis y reflexión sobre la idoneidad didáctica

Mediante los tipos de consignas descritas se abordan aspectos parciales de los procesos de enseñanza y aprendizaje, focalizados en la resolución de tareas, desarrollo de proyectos o actividades matemáticas. Esta estrategia de evaluación y formación puede ser pertinente en la preparación inicial de profesores, usualmente llevada a cabo sin relación directa con la práctica de la enseñanza.

En el caso de que la formación se realice en estrecha relación con la fase de prácticas en las escuelas o institutos, se trate de la formación de profesores en ejercicio, o se disponga de grabaciones audio-visuales de lecciones planificadas e impartidas en las escuelas será posible focalizar los procesos de evaluación y desarrollo de competencias profesionales aplicando la noción de idoneidad didáctica.

Supuesto dado un proceso de estudio “vivido” por un profesor (o del que se dispone de una descripción suficiente) la promoción y evaluación de su competencia profesional se puede hacer mediante el análisis de sus respuestas a la siguiente pregunta – tipo: ¿Cómo valorarías la idoneidad didáctica del proceso? Explica con detalle y justifica tu respuesta.

Se supone que el profesor está familiarizado con las dimensiones, componentes e indicadores empíricos de la noción de idoneidad didáctica, por lo que deberá emitir juicios razonados sobre la idoneidad epistémica, cognitiva – afectiva, instruccional y ecológica.

En Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) se describe una experiencia de formación inicial de profesores de educación primaria en la que los estudiantes tienen ocasión de “vivir” un proceso personal de estudio matemático en el que deben realizar un proyecto de análisis de datos siguiendo un modelo didáctico específico. De esta manera el formador crea una situación de reflexión /indagación sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio matemático implementado, al tiempo que los estudiantes profundizan en el conocimiento especializado del contenido estadístico.

5. Reflexiones Finales

En este trabajo hemos presentado las principales características de algunos modelos de categorización de los conocimientos del profesor de matemáticas. Partiendo de la propuesta general de conocimiento del contenido para la enseñanza de Shulman, pasando por el MKT de Ball y cols., y de la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas de Schoenfeld y Kilpatrick hemos tratado de mostrar que la noción de “idoneidad didáctica”, junto con sus dimensiones, componentes e indicadores empíricos (Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2006) permite articular los modelos anteriores al tiempo que los complementa con nuevos matices y desarrollos.

El breve análisis realizado de las categorías de conocimientos didácticos del profesor de matemáticas, introducidas por los modelos seleccionados muestra que, en mayor o menor medida, incluyen aspectos parciales de las seis facetas propuestas en el modelo basado en el EOS. Los niveles de análisis propuestos por

el EOS suponen una profundización y sistematización en la descripción de cada una de las facetas que puede ser útil en el diseño de acciones formativas de los profesores, y para evaluar las concepciones y conocimientos didácticos de los mismos. Así mismo, los criterios de idoneidad didáctica formulados pueden ser una guía para el diseño, implementación y evaluación de planes de formación de los profesores, y para la reflexión/ indagación de los mismos sobre su propia práctica.

El sistema de categorías de los conocimientos del profesor de matemáticas basado en el EOS deberá ser ampliado y refinado, en particular en cuanto a las dimensiones afectiva y ecológica. Dado que se trata de un modelo elaborado desde un planteamiento racional, esto es, a partir de la asunción de unos presupuestos epistemológicos, cognitivos e instruccionales sobre la matemática y su enseñanza, se requiere que los propios profesores pongan en práctica el modelo como instrumento de análisis de sus experiencias de clase. En consecuencia, se necesita implementar una agenda de investigación en formación de profesores (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008) que aporte información sobre las posibles estrategias a seguir para lograr que los profesores conozcan las herramientas, las adapten y apliquen a su propia práctica.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER

BIBLIOGRAFIA

- Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En A. Gutierrez (Ed.), *Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática*. (pp. 105-149). Madrid: Síntesis.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. (Versión ampliada en español disponible en, <http://www.ugr.es/local/jgodino>)
- Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Roa, R. y Ruiz, F. (2004a). *Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
- (Disponible en internet : <http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm>)
- Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Roa, R. y Ruiz, F. (2004b). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
- (Disponible en internet : <http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm>)

- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia*. Centro de Profesores y Recursos. Murcia.
- Graeber, A. y Tirosh, D. (2008). Pedagogical content knowledge. Useful concept or elusive notion. En P. Sullivan & T. Woods (eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 117-132). Rotterdam: Sense Publishers.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.257-315). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of Research of the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishing.
- Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4 - 14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Silverman, J. y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 499-511.
- Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.157-223). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics. En P. Sullivan & T. Woods (eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching*

Development (pp. 1-9). Rotterdam: Sense Publishers.
Wood, T. (Ed.) (2008). The international handbook of mathematics teacher education. Rotterdam: Sense Publishers.

Juan D. Godino, Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada jgodino@ugr.es; <http://www.ugr.es/local/jgodino>.